數學傳播 49卷1期, pp. 50-57

矩陣與不等式——創作一個屬於你自己的專屬不等式

林福林 · 林子喬

本文作者最近創作了一組不等式, 題目如下: 已知黃金比例 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, a,b 爲正實數, 證明以下兩題不等式成立:

$$2^{\phi}(a^{\phi}+b^{\phi}+1)\geq(a+1)^{\phi}+(a+b)^{\phi}+(b+1)^{\phi}, \tag{1}$$

$$2\times[(a^{\phi}+1)^{\phi-1}+(a^{\phi}+b^{\phi})^{\phi-1}+(b^{\phi}+1)^{\phi-1}]\geq 2^{\phi}(a+b+1). \tag{2}$$

當 $(a,b)=(1,1)$時等式成立。

說明這組不等式之前, 我們先一步步循序漸進, 希望高中生與高中老師可以看懂, 並且可以創作出一個屬於自己的不等式。先介紹冪平均 (power mean) 的觀念, 定義 p 次冪平均如下:

$$M_p(a_1,\ldots,a_n)=M_p(\{a_i\}_{i=1}^n)=\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

其中限制 $a_1,\ldots,a_n$ 皆爲正實數。當 $p=0$, 透過極限的概念可以推得幾何平均數 $M_0(a_1,\ldots,a_n)=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$, 以 $(1,4)$ 爲例, 圖 1 顯示當 $p\to 0$, $M_0(1,4)=\sqrt{1\times 4}=2$。

先從向量著手, 設向量 $\vec{V}=[a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$, 一般人都知道下面的結果:

$$M_p(a_1,\ldots,a_n)\geq M_q(a_1,\ldots,a_n)\text{ iff } p>q. \tag{4}$$

舉個簡單的例子, 設向量 $\vec{V}=[a\ b]$, 易知底下的不等式是對的:

$$\begin{aligned}M_{\infty}(a,b)&\geq M_2(a,b)\geq M_1(a,b)\geq M_{1/2}(a,b)\geq M_0(a,b)\geq M_{-1}(a,b)\\&\geq M_{-2}(a,b)\geq M_{-\infty}(a,b).\end{aligned} \tag{5}$$

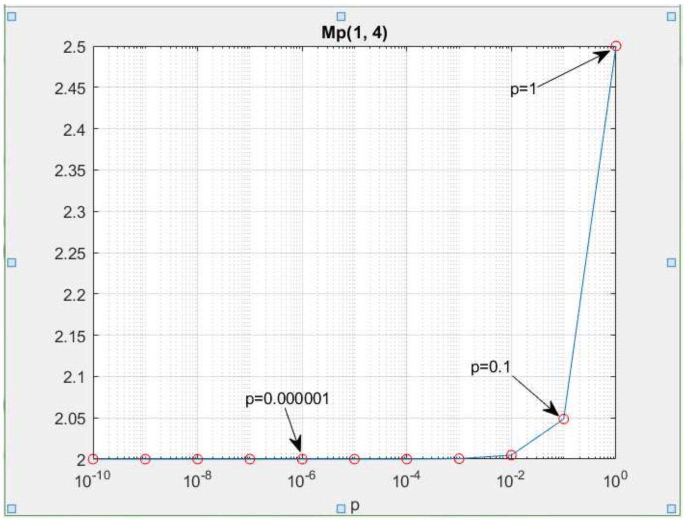


圖 1: 對應到不同 p (p 趨近 0) 值之 $M_p(1,4)$ 的程式計算結果

把 a, b 的冪平均代入 (5) 式得到

$$\begin{aligned}\max(a,b) &\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \Big(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\Big)^2 \\ &\geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} \geq \min(a,b). \end{aligned} \tag{6}$$

(6) 式中等號成立的條件是 $a=b$。從 (6) 式中讀者可以看到熟悉的算幾不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 或是幾何平均大於等於調和平均 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 等等。舉個數字的例子: 向量 $\vec{V}=[1\ 4]$, 參考 (6) 式得到

$$\begin{aligned}\max(a,b) = 4 &> \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}} > \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} > \Big(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\Big)^2 = \frac{9}{4} \\ &\geq \sqrt{ab} = 2 > \frac{2ab}{a+b} = \frac{8}{5} > \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{32}{17}} > \min(a,b) = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

接著我們進入矩陣的世界, 設任意正實數矩陣 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$, 介紹一個較少人知道的不等式, 英文名稱暫時稱作“Lin-Phoong inequality” [1], 中文戲稱爲蒿麥不等式。此不等式的敘述可以改寫如下:

考慮任意正實數矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$, p,q 爲任意實數, 定義 p 次冪平均:

$$M_p(a_1,\ldots,a_n)=M_q(\{a_i\}_{i=1}^n)=\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

如果 $p>q$, 則下列不等式成立

$$M_q(\{M_p(\{a_{ij}\}_{j=1}^N)\}_{i=1}^M)\geq M_p(\{M_q(\{a_{ij}\}_{i=1}^M)\}_{j=1}^N); \tag{8}$$

等式成立的條件是矩陣 A 的秩 $\text{rank}(A)=1$。

爲了方便說明, 我們先簡單的舉幾個不同 (p,q) 組合的例題。

例題一: 設定 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 及 $p=2>q=1$, 代入式 (8) 得到

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}. \tag{9}$$

這是大家熟知的閔可夫斯基不等式 (Minkowski inequality) 的一個簡單的例子。換句話說, 設定式 (8) 中不等式之參數, $M=2$, $N=n$ (此例 $n=2$), $p>0$ (此例 $p=2$), $q=1$, 此時的蓄麥不等式就簡化成與閔可夫斯基不等式同義。

例題二: 設定 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 及 $p=1>q=0$, 代入式 (8) 得到

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}\geq\sqrt{ac}+\sqrt{bd}. \tag{10}$$

如果改成設定 $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ 及 $p=1>q=0$, 代入式 (8) 得到

$$\sqrt[3]{(a+b)(c+d)(e+f)}\geq\sqrt[3]{ace}+\sqrt[3]{bdf}. \tag{11}$$

設定式 (8) 中不等式之參數, $M=2,3,\ldots$, $N=n$ (此例 $n=2$), $p=1$, $q=0$, 此時的蓄麥不等式就簡化成卡爾松不等式 [2]。

例題三: 設定 $C = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$ 及 $p = 1 > q = 0$, 代入式 (8) 得到

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq \sqrt{a^2c^2} + \sqrt{b^2d^2}. \tag{12}$$

整理並兩邊立方後得到

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2. \tag{13}$$

(13) 式即是讀者熟悉的柯西不等式。(12) 式或 (13) 式另一個等效的寫法如下:

$$\|(a,b)\| \times \|(c,d)\| = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{c^2+d^2} \geq ac+bd = (a,b)\cdot(c,d). \tag{14}$$

(14) 式表示兩向量的長度積大於等於兩向量的內積。

如果改成設定 $D = \begin{bmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \\ e^3 & f^3 \end{bmatrix}$ 及 $p = 1 > q = 0$, 代入式 (8) 得到

$$\sqrt[3]{(a^3+b^3)(c^3+d^3)(e^3+f^3)} \geq \sqrt[3]{a^3c^3e^3} + \sqrt[3]{b^3d^3f^3}. \tag{15}$$

整理並兩邊立方後得到

$$(a^3+b^3)(c^3+d^3)(e^3+f^3) \geq (ace+bdf)^3. \tag{16}$$

(16) 式也稱作廣義的柯西不等式, 從例題二到例題三的討論知道廣義的柯西不等式與卡爾松不等式是完全等價的, 都可以利用蕎麥不等式及適當的參數設定而得到。

例題四: 設定 $E = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ 及 $p = 1 > q = -1$, 這是電阻不等式的一個簡單的例子。由電阻不等式 [3] 知:

$$R_{SP}(\text{先串後並}) = \frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}} \geq R_{PS}(\text{先並後串}) = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{d}} + \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \tag{17}$$

整理得

$$R_{SP} = \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq R_{PS} = \frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c} = \frac{(adb+adc+abc+abc)}{(a+d)(b+c)}, \tag{18}$$

也可以整理成

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)} \geq 1. \tag{19}$$

如果熟悉蓄麥不等式並善加利用, 應該可以構造很多新的題目, 這裡我們舉一個例子來說明新題目如何產生。先隨意產生一個正實數矩陣, 例如 $F=\begin{bmatrix}1 & a^2 & 4\\ b & 4 & 4b^2\end{bmatrix}$, 此時即知當 $a=2, b=1$, 矩陣 A 的秩 $\text{rank}(A)=1$, 即等式會成立。我們取三種情況來說明, 分別是: (1) 例題五: $p=1$, $q=-1$, (2) 例題六: $p=\dfrac{1}{2}$, $q=-1$, (3) 例題七: $p=0$, $q=-1$, 即可得到三個未曾見過的新題目。

例題五: 設定 $F=\begin{bmatrix}1 & a^2 & 4\\ b & 4 & 4b^2\end{bmatrix}$ 及 $p=1>q=-1$, 根據蓄麥不等式知:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1+a^2+4}+\dfrac{1}{b+4+4b^2}}\ge\frac{1}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{b}}+\frac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4}}+\frac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4b^2}},\tag{20}$$

整理並移項得到

$$\Big(\frac{b}{b+1}+\frac{4a^2}{a^2+4}+\frac{4b^2}{b^2+1}\Big)\times\Big(\frac{1}{a^2+5}+\frac{1}{4b^2+b+4}\Big)\le 1.\tag{21}$$

例題六: 設定 $F=\begin{bmatrix}1 & a^2 & 4\\ b & 4 & 4b^2\end{bmatrix}$ 及 $p=\dfrac{1}{2}>q=-1$, 根據蓄麥不等式知:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{(1+\sqrt{a^2}+\sqrt{4})^2}+\dfrac{1}{(\sqrt{b}+\sqrt{4}+\sqrt{4b^2})^2}}\ge\left(\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{b}}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4b^2}}}\right)^2,\tag{22}$$

整理並移項得到

$$\left(\sqrt{\frac{b}{b+1}}+\sqrt{\frac{4a^2}{a^2+4}}+\sqrt{\frac{4b^2}{b^2+1}}\right)^2\times\Big(\frac{1}{(a+3)^2}+\frac{1}{(2b+\sqrt{b}+2)^2}\Big)\le 1.\tag{23}$$

例題七: 設定 $F=\begin{bmatrix}1 & a^2 & 4\\ b & 4 & 4b^2\end{bmatrix}$ 及 $p=0>q=-1$, 根據蓄麥不等式知:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{16b^3}}}\ge\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{b}}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4b^2}}\right)},\tag{24}$$

整理並移項得到

$$\frac{16a^2b^3}{(b+1)(a^2+4)(b^2+1)}\times\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{4a^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16b^3}}\Big)^3\le 1.\tag{25}$$

(21) 式, (23) 式及 (25) 式的結果經電腦程式驗證都沒問題, 以例題六 (23) 式爲例, 我們把 MATLAB 計算的結果以等高線畫成圖 2, 稱爲等高線圖, 可以知道當 $a = 2$ 及 $b = 1$ 時確實出現最大值。圖 3 則是連續的曲面圖, 可以看到 a, b 變化時目標函數值的變化, 最大值的確是 1。

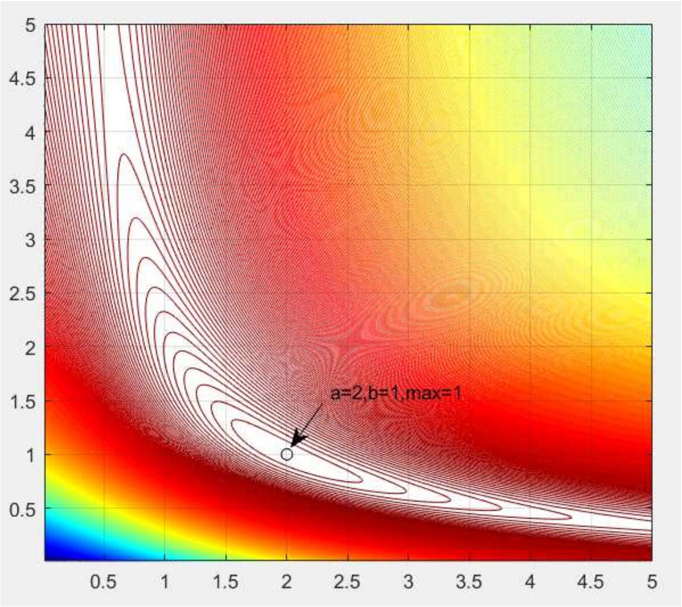


圖2: 例題六不等式的程式計算結果對應的等高線圖

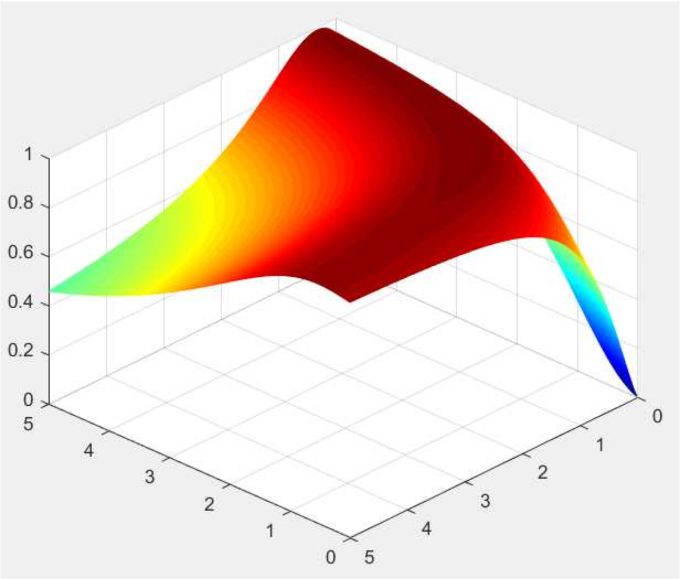


圖3: 例題六不等式的程式計算結果對應的曲面圖

最後我們再回到文章開頭提到的, 作者幾天之前創作的一個不等式的題目。

例題八: 設定 $G=\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \end{bmatrix}$ 及 $p=\phi>q=1$, 其中 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 也稱作黃金比例。觀察 G 矩陣知當 $a=1$, $b=1$, 矩陣 G 的秩 $\operatorname{rank}(F)=1$, 即等式會成立。因爲 $p=\phi>q=1$, 根據蓄麥不等式知

$$\sqrt[\phi]{a^\phi+b^\phi+1^\phi}+\sqrt[\phi]{1^\phi+a^\phi+b^\phi}\geq\sqrt[\phi]{(a+1)^\phi+(a+b)^\phi+(1+b)^\phi}. \tag{26}$$

兩邊取 ϕ 次方整理得到 (1) 式, 重寫一次如下:

$$2^\phi(a^\phi+b^\phi+1)\geq(a+1)^\phi+(a+b)^\phi+(b+1)^\phi. \tag{27}$$

例題九: 設定 $H=\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$ 及 $p=\phi>q=1$。觀察 H 矩陣知當 $a=1$, $b=1$, 矩陣 H 的秩 $\operatorname{rank}(F)=1$, 即等式會成立。因爲 $p=\phi>q=1$, 根據蓄麥不等式知

$$\sqrt[\phi]{a^\phi+1^\phi}+\sqrt[\phi]{b^\phi+a^\phi}+\sqrt[\phi]{1^\phi+b^\phi}\geq\sqrt[\phi]{(a+b+1)^\phi+(1+a+b)^\phi}. \tag{28}$$

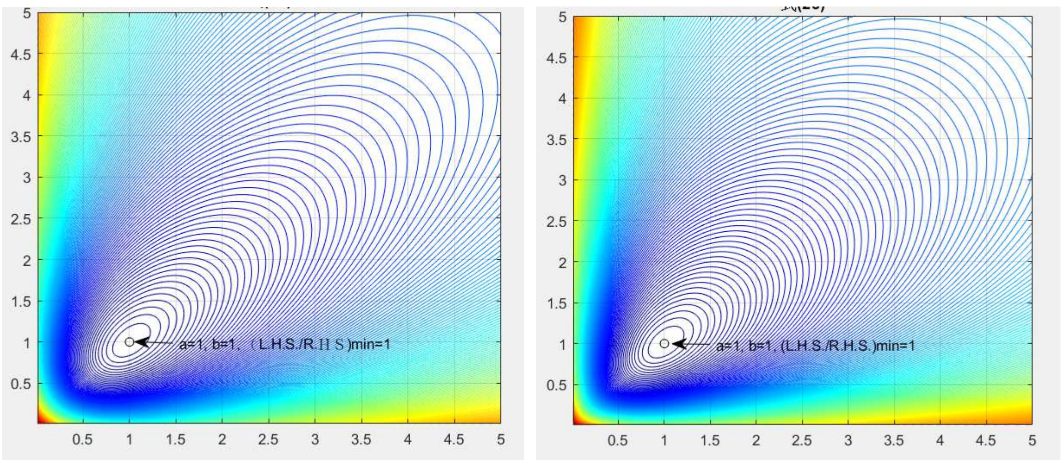
由於 $\dfrac{1}{\phi}=\phi-1$, 整理得:

$$(a^\phi+1)^{\phi-1}+(a^\phi+b^\phi)^{\phi-1}+(b^\phi+1)^{\phi-1}\geq 2^{\phi-1}(a+b+1). \tag{29}$$

整理得到 (2) 式, 重寫一次如下:

$$2\times\left[(a^\phi+1)^{\phi-1}+(a^\phi+b^\phi)^{\phi-1}+(b^\phi+1)^{\phi-1}\right]\geq 2^\phi(a+b+1). \tag{30}$$

爲了驗證自創的不等式 (27) 及 (30) 的正確性, 圖 4(a) 及圖 4(b) 分別畫出它們的等高線圖, 圖 4(a) 與圖 4(b) 類似, 表示這兩個不等式有相同的淵源。



(a)　　　　(b)

圖 4: (a) 例題八及 (b) 例題九不等式的程式計算結果分別對應的等高線圖

最後做個結論, 本文試著推廣“蕎麥不等式”給更多人知道, 透過設定蕎麥不等式的一些參數可以得到幾種已知的不等式, 例如柯西不等式及閔可夫斯基不等式, 相信很多人都不知道原來柯西及閔可夫斯基不等式可以有共同的源頭, 即蕎麥不等式。若讀者們想要創造新的題目, 只要設定蕎麥不等式之參數, 例如 $M=2$, $N=3$, $p=2$, $q=-1$, 再加上一點適當的數字與變數, 或加上一些變數的限制, 例如 $a+b+c=1$, 就可以產生一個屬於你的專屬不等式, 因此希望藉著這篇文章來推廣這個較少人知道的蕎麥不等式。

參考文獻

1. T.-C. Lin and S.-M. Phoong, A New Cyclic-Prefix Based Algorithm for Blind CFO Estimation in OFDM Systems, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 15, no. 6, 3995-4008, June 2016.
2. 張堯, 冷岡松, 沈文選, 唐立華。奧林匹克-數學中的代數問題, 曉園出版社, pp.160-169, 2005。
3. 林福林, 林子喬。矩形電阻網路串並聯順序及相關不等式的推導。數學傳播季刊, 45(2), 21-28, 2021。

—本文作者林福林任教南台科技大學電子工程學系, 林子喬爲聯發科技資深工程師—